NOM Prénom : 11/04/2013

CLASSE :

Devoir commun de Mathématiques

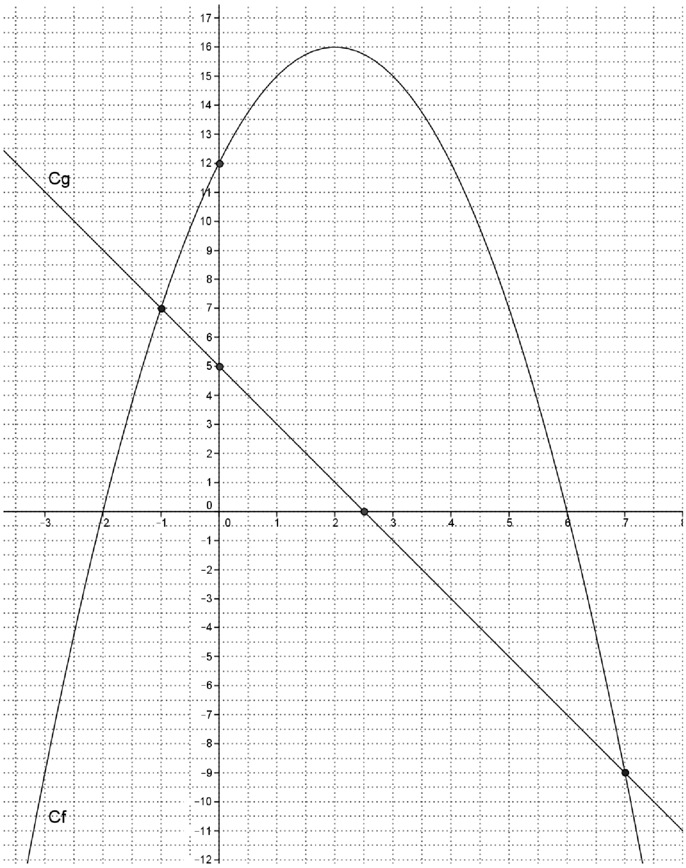
Durée : deux heures

EXERCICE 1 (12 POINTS)

On donne les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$. $\mathcal{C}_g$ est une droite.

A) Par lectures graphiques :

1. a) Donner l'image de -2 par g.
   b) Donner les antécédents de 12 par f.
   c) Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
   A l'aide des variations de f comparer $f(125)$ et $f(40\pi)$. Justifier soigneusement.
   d) Donner le tableau de signes de g sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ graphiquement (sans justifier) :
   a) $f(x) = 0$, b) $g(x) = -5$, c) $f(x) < 0$, d) $f(x) \geqslant 15$, e) $f(x) \geqslant g(x)$.
3. Lire graphiquement l'expression de $g(x)$. On portera sur le graphique les éléments qui ont permis cette lecture.



B) Par calculs :

On admet que $f(x) = (6-x)(x-1) + 18 - 3x$

1. Factoriser $f(x)$.
2. Développer $f(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x,

$$f(x) = 16 - (x-2)^2$$

4. En utilisant la forme de f la plus adaptée :
   a) Calculer l'ordonnée du point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $2 + \sqrt{3}$.
   b) Résoudre par le calcul $f(x) < -9$.

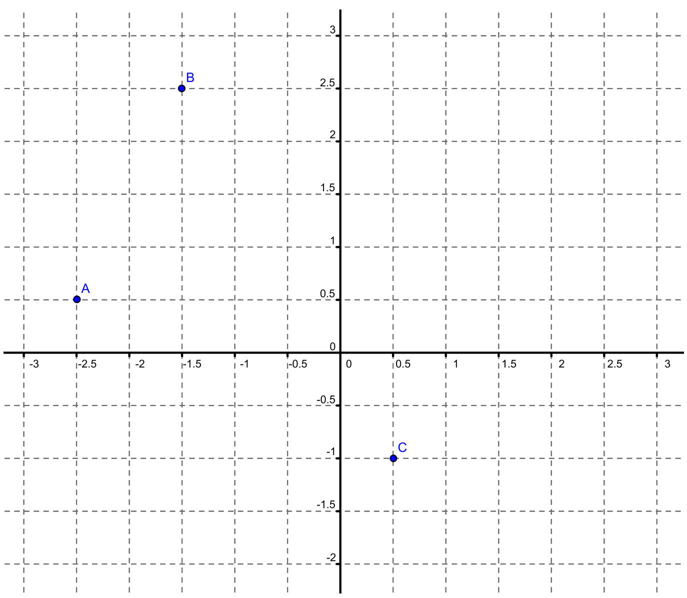
EXERCICE 2 (8 POINTS)

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On considère les points $A(-2,5;0,5)$, $B(-1,5;2,5)$ et $C(0,5;-1)$.

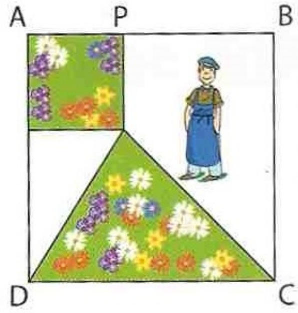
1. Déterminer, **par le calcul**, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Placer ci-contre, le point D tel que

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

   On fera apparaître les traits de construction.
3. En utilisant les deux questions précédentes, déterminer **par le calcul**, les coordonnées de D.
4. Dans cette question, on admet que $D(1,5;1)$.
   Justifier que ABDC est un parallélogramme.
5. ABDC est-il un rectangle ? Justifier.



EXERCICE 3 (10 POINTS)

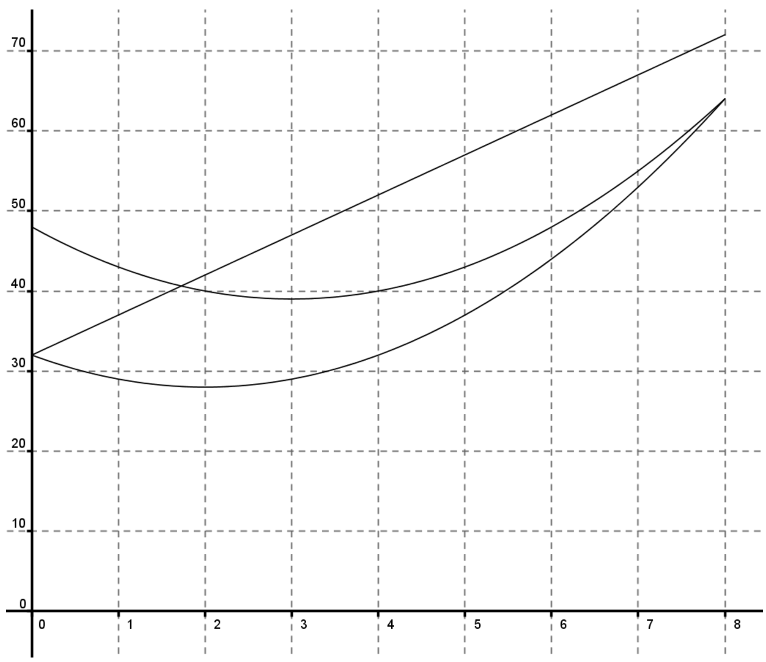


Une entreprise paysagiste doit créer un espace "jardin et terrasse" sur un terrain $ABCD$ de forme carrée de côté $8m$. Le projet présenté aux clients, modifiable à souhait, est schématisé sur la figure ci-contre. La partie "jardin" coloriée comprend un carré et un triangle ayant un sommet commun. La terrasse occupe le reste du jardin.
Le point P peut occuper n'importe quelle position sur le segment $[AB]$. On note x la longueur AP en mètres.

1. A quel intervalle x doit-il appartenir ? On notera I cet intervalle.
2. Montrer que l'aire du jardin en m^2, notée $J(x)$, vaut pour $x \in I$:
$$J(x) = x^2 - 4x + 32$$
3. Montrer que pour tout $x \in I$ on a :
$$J(x) = (x-2)^2 + 28$$
4. En choisissant la forme de $J(x)$ la mieux adaptée, répondre (en justifiant) aux questions suivantes :
   a) Est-il possible que l'aire du jardin soit égale à la moitié de celle du terrain ?
   b) Est-il possible que l'aire du jardin soit égale au quart de celle du terrain ?
5. Remplir le tableau de valeurs suivant (*on pourra utiliser la table de la calculatrice*).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$J(x)$									

6. Parmi les trois courbes dessinées ci-dessous, identifier celle de J et la repasser en couleur.
7. Retrouver graphiquement les réponses aux deux questions posées dans la question 4).
On expliquera clairement la démarche.



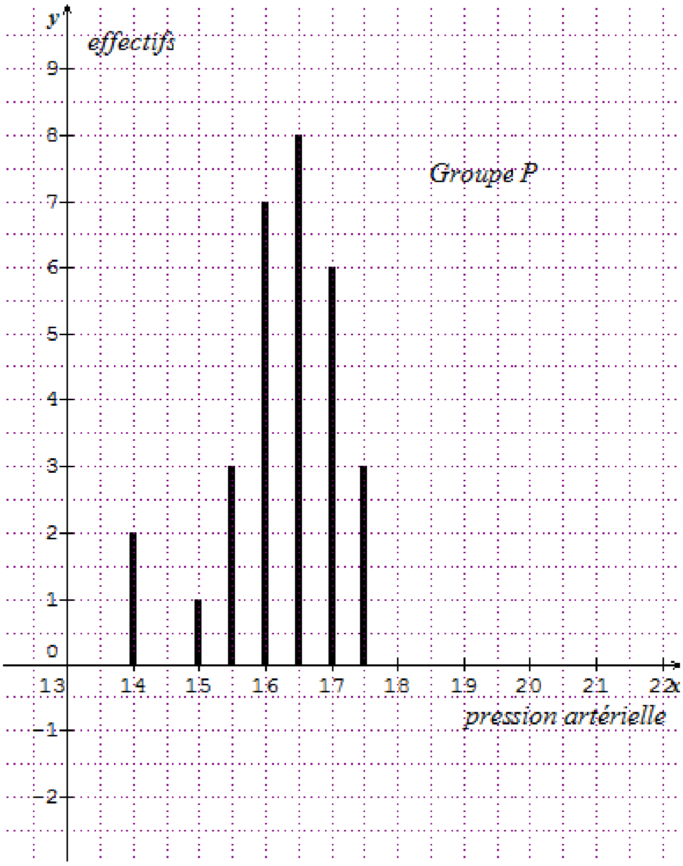
EXERCICE 4 (10 POINTS)

Afin de tester l'efficacité d'un médicament contre le stress, 60 patients ayant environ $16,5$ de pression artérielle ont accepté de participer à un essai clinique.
Après tirage au sort, la moitié des patients, constituant le groupe M, a pris le médicament pendant un mois. L'autre moitié, constituant le groupe P, a pris un placebo c'est-à-dire un comprimé neutre ne contenant aucun principe actif.
Les patients ne savent pas s'ils prennent le médicament ou le placebo.
Les mesures de pression artérielle concernant les patients des deux groupes après le mois d'essai clinique, sont indiquées ci-dessous :

Groupe M : les données sont données dans le tableau ci-dessous.

Pression artérielle	12	13	13.5	14	14, 5	15	16	17	18
Effectifs	2	4	2	7	6	5	1	1	2

Groupe P : les données sont représentées par le graphique ci-dessous.



1. Déterminer les fréquences de la série du groupe M sous la forme de votre choix.
2. Déterminer, pour chaque série, l'étendue, la moyenne, la médiane, le premier quartile et le troisième quartile. On pourra utiliser la calculatrice et, dans ce cas, il faudra le préciser sur la copie. Les résultats sont à donner, si besoin, avec deux chiffres après la virgule.
3. En utilisant les données et (ou) le graphique dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses et justifier le choix.
   - **Phrase 1** : Au moins 25% des patients du groupe M ont une pression artérielle inférieure ou égale à $13,5$.
   - **Phrase 2** : Au moins 75% des patients ayant pris le placebo ont une pression artérielle supérieure ou égale à 15.
   - **Phrase 3** : sur l'ensemble des 60 patients la pression artérielle moyenne est supérieure ou égale à 16.
4. En utilisant les données et (ou) le graphique dire si le médicament semble être efficace en présentant vos arguments.

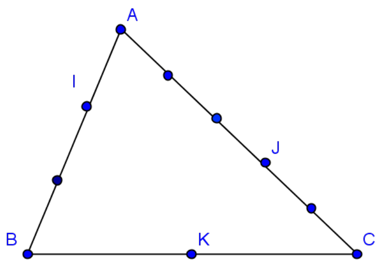
EXERCICE 4 (10 POINTS)

Les trois parties suivantes sont indépendantes.

Partie A : Q.C.M

Pour chaque question, choisir la bonne réponse. Une bonne réponse rapporte un point, une mauvaise réponse enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

1. Soit A, B et C trois points du plan. Si $\overrightarrow{AC} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $AB = 4$, alors :
   a) $BC = 6$ b) $BC = 10$ c) $BC = -10$ d) $BC = 2$
2. Soit A, B, C et D quatre points du plan tels que le point C n'appartient pas à la droite (AB) et $\overrightarrow{CD} = -\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$. Alors :
   a) les points A, B et D sont alignés b) les points C, A et D sont alignés
   c) ABCD est un trapèze d) ABCD est un parallélogramme
3. Sur les côtés du triangle ABC ci-dessous, les divisions sont régulières. Alors :
   a) $\frac{1}{2}\overrightarrow{JC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{0}$ b) $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$ d) $\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{CJ}$



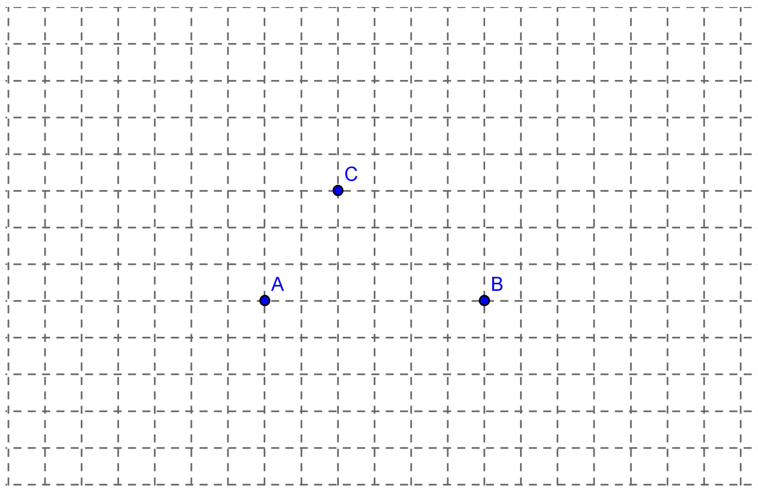
Partie B : Constructions vectorielles

Soit A, B et C trois points.
Construire les points M, N et P définis par :

a) $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$

c) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CA} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$



Partie C :

Dans le plan muni d'un repère, on donne les points $A(-2;1)$, $B(3;3)$, $C(-5;-3)$, $D(5;1)$ et $T(2;-2)$.

1. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2. Les points A, B et T sont-ils alignés ? Justifier.
3. Déterminer les coordonnées du point K de l'axe des ordonnées tel que les points A, B et K sont alignés.
4. Déterminer algébriquement les coordonnées du point M définie par la relation vectorielle $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$